b- Soit O', B', C' les images respectives de O, B, C par f.
Quelle est la nature du quadrilatère O'AB'C' ?

PROBLEME

A] Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie dans IR_+^* par : $f_n(x) = (x-1)^n \text{Log}x$. C_n désigne la courbe de f_n dans un repère orthonormé $R = \left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1/ On pose pour tout x de IR_+^*, $\varphi_n(x) = n\text{Log}x + 1 - \frac{1}{x}$.

a- Etudier les variations de φ_n.

b- Calculer $\varphi_n(1)$ et en déduire le signe de $\varphi_n(x)$ pour tout $x > 0$.

2/a- Etudier les variations de f_n et dresser, suivant la parité de n, son tableau de variation.

b- Tracer, dans le même repère R, les courbes C_1 et C_2 en précisant les positions relatives de ces deux courbes.

3/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_1 et C_2.

B] Dans cette partie on se propose d'etudier la suite $(v_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

1/ On considère la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ définie par $u_n = \int_1^2 f_n(x)dx$.

Montrer que, pour tout n de IN*, $(n+1)u_n = \text{Log}2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x} dx$.

En déduire

a- la relation : $\frac{1}{2(n+2)} \leq \text{Log}2 - (n+1)u_n \leq \frac{1}{n+2}$; pour tout n de IN*

b- la limite de $(n+1)u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2/ On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout $x > 0$

$$S_n(x) = 1 - (x-1) + \ldots + (-1)^n (x-1)^n$$

a- Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{x} - (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+1}}{x}$

b- En déduire, en utilisant la première question de la partie **B]**, que pour n élément de IN* ; $\text{Log}2 - v_n = (-1)^{n+1}[\text{Log}2 - (n+1)u_n]$

3/ Montrer que la suite $(v_n)_{n\in IN}$ est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

UNE CORRECTION POSSIBLE